



TITLE:

# 形式的巾級数環のHadamard積(解析数論:最近の発展)

AUTHOR(S):

原瀬, 巍

---

CITATION:

原瀬, 巍. 形式的巾級数環のHadamard積(解析数論:最近の発展). 数理解析研究所講究録 1989, 708: 107-112

ISSUE DATE:

1989-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/101640>

RIGHT:

形式的巾級数環の Hadamard 積

(Algebraic elements in formal power series rings II)

原瀬 巍 (Takashi Harase)

(東工大・理)

SECTION 0. この稿では巾級数の Diagonal map, Hadamard 積 などについての最近の結果をまとめて述べる。

まず次の classical な proposition を考える. (cf. [2])

(\*) Every algebraic function  $\phi(z)$  is a contour integral of a rational function of two variables:  $\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R(z, w) dw$ .

( $\because$ )  $P(z, w)$  を  $P(z, \phi(z)) = 0$ ,  $\frac{\partial P}{\partial w}(0, 0) \neq 0$  を満たす多項式とすると  $R(z, w) = \frac{w \frac{\partial P}{\partial w}}{P}$  とすればよい。なぜならば  $P(z, w) = (w - \phi(z))g(z, w)$  とおくと  $\frac{w \frac{\partial P}{\partial w}}{P} = \frac{w}{w - \phi(z)} + \frac{w}{g(z, w)}$ ,  $\int_{\gamma} \frac{w}{g(z, w)} dw = 0$ ,  $\int_{\gamma} \frac{w}{w - \phi(z)} dw = 2\pi i \phi(z)$ .  $\square$

さて、 $f(x, y) \in \mathbb{C}(x, y)$  が等式  $\frac{w \frac{\partial P}{\partial w}}{P} = f(w, \frac{z}{w}) \frac{1}{w}$  を満たすものとする。このとき、 $f(x, y) = \sum_{n, m \geq 0} a_{n, m} x^n y^m \in \mathbb{C}[[x, y]]$  とすると  $\phi(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n, n} z^n$  と書ける。一般に Diagonal map  $\mathcal{D}: k[[x_1 \dots x_m]] \rightarrow k[[x]]$  を  $\mathcal{D}(\sum_{n_1, \dots, n_m} a_{n_1, \dots, n_m} x_1^{n_1} \dots x_m^{n_m}) = \sum_{n \geq 0} a_{n, \dots, n} x^n$  で定義すると、次の定理がなりたつ。

Theorem(Furstenberg). Let  $\phi \in k[[x]]$  be algebraic over  $k(x)$ , then  $\phi$  is a diagonal of some rational  $R(x, y) \in k(x, y)$ . ( $k$ :field)

この定理の一般化、および逆をもとめることが以後の問題となった。

次に  $f = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, g = \sum_{n \geq 0} b_n x^n \in k[[x]]$  にたいして Hadamard, Hurwitz,

Lamperti product をそれぞれつぎのように定義する。

$$f * g = \sum_{n \geq 0} a_n b_n x^n,$$

$$f(H)g = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n C_k a_k b_{n-k} \right) x^n,$$

$$f(L)g = \sum_{n \geq 0} c_n x^n,$$

$$\text{ここで } c_n = \sum_{i+j+k=n} \frac{n!}{i!j!k!} a^i b^j c^k a_{i+k} b_{j+k}.$$

このときあきらかに  $f * g = \mathcal{D}(fg)$ 。

#### SECTION 1.

$k$  を characteristic が 0 の体、 $x$  を indeterminate,  $X/k(x)$  を proper smooth variety とする。よく知られているように de Rham cohomology  $H_{DR}^i(X)$  には "Gauss-Manin" connection が定義される:

$$\nabla : H_{DR}^i(X) \rightarrow H_{DR}^i(X) \otimes \Omega_{k(x)/k}^1.$$

このとき  $\dim_{k(x)} H_{DR}^i(X) = l < \infty$  とすれば 各  $\omega \in H_{DR}^i(X)$  にたいして、

$$\left[ \left( \nabla \left( \frac{d}{dx} \right) \right)^m - \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_j \left( \nabla \left( \frac{d}{dx} \right) \right)^j \right] \omega = 0, \quad \gamma_j \in k(x)$$

となる  $\gamma_j$  (depend on  $\omega$ ) がある。 $\gamma_j$  の denominator の 最小公倍数を  $\delta \in k[x]$  とする。

$$\text{さてこの } \delta \text{ にたいして } k[x, \frac{d}{dx}] \text{ の元 } \delta \left[ \left( \frac{d}{dx} \right)^m - \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_j \left( \frac{d}{dx} \right)^j \right]$$

の形の元の直和因子の積を geometric differential equation(g.d.e) ということにする。また g.d.e. の解となる巾級数も g.d.e. とあわす ことにする。

数体  $K$  上の巾級数  $f = \sum_{n \geq 0} a_n x^n (a_n \in K)$  はつぎの 条件をみたすとき

G-function という。

1.  $a_n$  の conjugates と  $\text{l.c.m.}\{\text{den}(a_1); 1 \leq n\}$  の absolute values は  $c^n$  の order,

2.  $f$  は  $k(x)$  上の homogeneous linear differential equation の解。

$K$  が数体、一変数 ( $m=1$ ) の場合 Hadamard 積についていられていることを表にすると次のようになる。

*	rational	algebraic	g.d.e.	G-function
rational	rational	algebraic	g.d.e.	G-function
algebraic	algebraic	g.d.e.	g.d.e.	G-function
g.d.e.	g.d.e.	g.d.e.	g.d.e.	G-function
G-function	G-function	G-function	G-function	G-function

注意 1。最近 Woodcock-Sharif は  $m=2$  のとき  $\text{rational} * \text{rational} = \text{algebraic}$  を証明したが、一般の  $m$  については  $\text{rational} * \text{rational}$  も未知である。

注意 2。上の表の証明は Andre [1] 参照。Hadamard 積 および Diagonal に関して多数の予想があるが、あまりにおおすぎるので、全て省略する。

## SECTION 2.

$k$  を  $\text{char}(k)=p>0$  の体  $f, g$  は  $k[[x_1, \dots, x_m]]$  の元 とするとき Hadamard 積  $f * g$  について考える。標数 0 の場合と異なって次の表はふしぎなことに  $m(m>0)$ -変数の形式的巾級数環でなりたつ。

*	rational	algebraic	?
rational	(rational)	algebraic	?
algebraic	algebraic	algebraic	?
?	?	?	?

(rational) は  $m=1$  のとき rational、 $m>1$  のとき algebraic を意味する。

Hurwitz, Lamperti 積 についても同様。また  $f \in k[[x_1, \dots, x_m]]$  が algebraic/ $k(x_1, \dots, x_m)$  ならば  $\mathcal{D}(f)$  も algebraic/ $k(x)$  である。

上の結果は以前得た次の定理から出る。(cf.[3])

Theorem 0'. The following conditions are equivalent.

- (a)  $f$  is algebraic
- (b)  $f$  is contained in  $A$ -stable  $k(\mathbf{x})$ -finite submodule  $M \subset K$ .
- (c)  $f$  is contained in  $A$ -stable  $k$ -finite subspace  $V \subset K$ .

ここで  $K=k((\mathbf{x}))=k((x_1, \dots, x_m))$  とする。また  $q$  を  $p$  のべき、 $\mathbf{r}=(r_1, \dots, r_m)$ ,  $0 < r_i < q$  とするとき。

$f = \sum \mathbf{a}_{\mathbf{n}} x^{\mathbf{n}}$  にたいして  $A_{\mathbf{r}}(f) = \sum (\mathbf{a}_{\mathbf{qn}+\mathbf{r}})^{1/q} x^{\mathbf{n}}$  とする。また subset  $M \subset k((\mathbf{x}))$  が  $A$ -stable とは  $f \in M \Rightarrow A_{\mathbf{r}}(f) \in M$  で定義する。

この定理を見直すことによってつぎの定量的な結果を得た。(cf.[4]) ここで  $\text{size}(f) = \max_i \{\deg_{x_i}(f)\}$  とする。

Theorem 0". Let  $f$  and  $g$  be elements in  $k[[\mathbf{x}]] = k[[x_1, \dots, x_m]]$ .

- (a) If  $f$  is an element in  $k((\mathbf{x}))$  of degree at most  $d$  and size at most  $s$  then the diagonal  $\mathcal{D}(f)$  is algebraic of degree at most

$$p^{d[(p^{d-2}+1)(p^{d+1}-1)/(p-1) - s(p^{d-2}+1)p^{-w}(d^2-1)+1]^m}$$

where  $w$  is the smallest integer with  $p^w \geq d$ .

- (b) If  $f$  (resp.  $g$ ) is algebraic of degree  $d_1$  (resp.  $d_2$ ) and size  $s_1$  (resp.  $s_2$ ) then the Hadamard product  $f*g$  is algebraic of degree at most

$$\exp\{\log(p) \cdot d_1 d_2\} \\ [s_1 (p^{d_1-2}+1)(p^{d_1+1}-1)/(p-1) - s_1 (p^{d_1-2}+1)p^{-w_1}(d_1^2-1)+1]^m \\ [s_2 (p^{d_2-2}+1)(p^{d_2+1}-1)/(p-1) - s_2 (p^{d_2-2}+1)p^{-w_2}(d_2^2-1)+1]^m \}.$$

where  $w_i$  is the smallest integer with  $p^{w_i} \geq s_i$ .

証明の概略。 Th.0' の証明は  $(a) \Rightarrow (c) \Rightarrow (b) \Rightarrow (a)$  の順で行った。その際次の事実があった。

- (1)  $\dim_k(V) \geq \dim_{k(x)}(M)$ ,  
 (2)  $M$  contains all  $q^i$ -th powers of  $f$ ,  
 (3) If  $f$  satisfies a nontrivial equation  $a_d f^{q^d} + a_{d-1} f^{q^{d-1}} + \dots + a_0 f = 0$  with  $a_i \in k[x]$  and  $\text{size}(a_i) \leq c$ , then  $\dim_k(V) \leq d \cdot (q^{d-2} + 1)c + 1$ .  
 更に、次の Lemma を新たに用意する。

Lemma. If  $f$  is algebraic with degree  $d$  and size  $s$ , then  $f$  satisfies the following non-trivial equation over  $k[x]$ :

$$(*) \quad c_d f^{q^d} + c_{d-1} f^{q^{d-1}} + \dots + c_0 f = 0 \quad \text{size}(c_j) \leq c \quad \text{where } c = s[(q^{d+1} - 1)/(q - 1) - q^{-w}(d^2 - 1)].$$

さて  $f$  が Lemma の条件をみたすとする、この Lemma から  $c$  が上から評価出来る。(3) から  $\dim_k(V)$  が評価出来るので diagonal  $\mathcal{D}(f)$  をふくむ  $\mathcal{D}(V)$  の次元が評価出来る。 $\mathcal{D}(V)$  に対して (1), (2) を用いることによって  $\mathcal{D}(f)$  の  $k(x)$  上の degree を上から評価できる。Hadamard, Hurwitz, Lamperti 積などについても同様である。

注意3。geometric differential equation は characteristic が  $p > 0$  のときも定義できるが、その解の例である hyper geometric functions は mod  $p$  で(それが定義できるとき) algebraic になってしまう。

注意4。上記の表で ? は 何か? それが?である。

#### REFERENCES

- [1] Andre Y.: G-functions and geometry, Aspect of Math. E13, Vieweg, Wiesbaden (1989).  
 [2] Furstenberg H.: Algebraic function over finite field", J. of Alg. vol.7.  
 [3] Harase T.: Algebraic elements in formal power series rings, Israel J. of Math, vol.63, No.3, 1988.

[4] -: Algebraic elements in formal power series rings II, to appear.